УДК 519.1

Л. Н. Бондаренко, М. Л. Шарапова

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ФОРМУЛЫ РОДРИГА В КОМБИНАТОРНОМ АНАЛИЗЕ[1]

Аннотация. Рассматривается обобщенная формула Родрига, позволяющая определить некоторые важные семейства многочленов, используемые в комбинаторном анализе. Эта формула применяется для получения рекуррентных соотношений и производящих функций. В частности, с этих позиций исследуются обобщенные многочлены Эйлера и рассматриваются их свойства. Для комбинаторной интерпретации коэффициентов этих многочленов привлекаются обобщенные перестановки Гесселя – Стенли и корневые помеченные r-угольные кактусы. Также рассматриваются конечно-разностные и q-аналоги обобщенной формулы Родрига, с помощью которых, в частности, изучаются q-аналоги экспоненциальных многочленов и многочленов Эйлера, а также их свойства.

Ключевые слова: формула Родрига, рекуррентная формула, производящая функция, непрерывные дроби, многочлены Эйлера, тождество Ворпицкого, перестановки Гесселя – Стенли, корневые помеченные r-угольные кактусы, q-экспоненциальные многочлены, q-многочлены Эйлера.

Abstract. The article considers the generalized Rodrigues formula, which allows to define some important polynomial families applied in combinatorial analysis. This formula is used to obtain recurrence correlations and generating functions. In particular, from this point of view it is possible to study generalized Eulerian polynomials and consider their properties. In order to combinatorially interpret the coefficients of these polynomials the authors use generalized permutations of Gessel – Stanley and root marked r-angle cactuses. The article also considers finite-difference and q-analogues of the generalized Rodrigues' formula, by which, in particular, the authors study the q-analogs of exponential polynomials and Eulerian polynomials and their properties.

Key words: Rodrigues formula, recursion formula, generating function, continued fractions, Eulerian polynomials, Worpitzky identity, Gessel – Stanley permutations, root marked r-angle cactuses, q-exponential polynomials, q-Eulerian polynomials.

Введение

Важный метод характеризации классических ортогональных многочленов $\{P_n(t)\}_0^\infty$ состоит в применении обобщенной формулы Родрига

$$P_n(t) = k_n^{-1} w^{-1}(t) D^n (w(t) x^n(t)),$$

где $w(t)$ – весовая функция; $D = d/dt$; k_n – постоянная; $x(t)$ – функция, не зависящая от n. Эта формула имеет также конечно-разностный аналог [1].

Определим многочлены $\{R_n(t)\}_0^\infty$ с помощью следующей модификации обобщенной формулы Родрига:

$$R_n(t) = k^{-n}(t) w^{-1}(t) H^n w(t), \quad (1)$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке первого автора грантом РФФИ, номер проекта 11-01-00212а.

где $w(t)$ – весовая функция; $H = h(t)D$ – дифференциальный оператор; $k(t)$ и $h(t)$ – функции, не зависящие от n, причем нормирующий множитель $k^{-n}(t)$; функция $w(t)$ и оператор H выбираются так, чтобы многочлен $R_n(t)$ имел степень n и целые неотрицательные коэффициенты. Последовательность $\{R_n(t)\}_0^\infty$ в [2] называется нормализованной, если $R_0(t)=1$ и $R_n(0)=0,\ n\ge 1$.

Такие последовательности и значения $R_n(t)$ при $t=1;-1$ часто встречаются в комбинаторном анализе. Например: экспоненциальные многочлены $S_n(t)=\sum_{k=1}^n S_{n,k}\,t^k$ (для них в (1) $k(t)=1,\ w(t)=e^t,\ h(t)=t$) служат производящей функцией для чисел Стирлинга второго рода $\{S_{n,k}\}_{k=1}^n$, а $\{S_n(1)\}_0^\infty$ – числа Белла; многочлены Эйлера $A_n(t)=\sum_{k=1}^n A_{n,k}\,t^k$ (для них в (1) $k(t)=(1-t)^{-1},\ w(t)=(1-t)^{-1},\ h(t)=t$) являются производящей функцией для чисел Эйлера $\{A_{n,k}\}_{k=1}^n$, а $\{(-1)^m A_{2m-1}(-1)\}_1^\infty$ – тангенциальные числа [2–5].

Выражение (1) не только задает схему вычисления многочленов $\{R_n(t)\}_0^\infty$, но также фиксирует отображение $(H,w)\to\{R_n(t)\}_0^\infty$, определяющее их комбинаторную интерпретацию. Выбор в (1) оператора H и весовой функции $w(t)$ позволяет определить различные многочлены, имеющие важные комбинаторные приложения, и исследовать их свойства.

1. Основные леммы

Для целей комбинаторного анализа рассмотрим связь обобщенной формулы Родрига (1) с рекуррентной формулой для многочленов $R_n(t)$ и некоторыми производящими функциями последовательности $\{R_n(t)\}_0^\infty$.

Лемма 1. Из (1) непосредственно следует рекуррентное соотношение

$$R_0(t)=1,\ R_n(t)=k^{-n}(t)w^{-1}(t)\,h(t)\times$$

$$\times(k^{n-1}(t)\,w(t))'R_{n-1}(t)+k^{-1}(t)\,h(t)\,R'_{n-1}(t),\ n\ge 1, \tag{2}$$

являющееся другим важным способом задания последовательности $\{R_n(t)\}_0^\infty$.

Доказательство леммы 1 основано на следующей записи выражения (1):

$$R_n(t)=k^{-n}(t)w^{-1}(t)\,h(t)\,(k^{n-1}(t)\,w(t)R_{n-1}(t))',$$

и вычисления производной от произведения функций $k^{n-1}(t)\,w(t)R_{n-1}(t)$.

Отметим, что из формулы (2) несложно получить (1), а также с помощью леммы 1 легко найти рекуррентное соотношение для коэффициентов многочлена $R_n(t)$, часто используемое при их комбинаторной интерпретации. Рекуррентная формула (2) успешно применяется для вычисления моментов распределения коэффициентов нормированного многочлена $R_n^{-1}(1)R_n(t)$ и исследования асимптотики этого распределения [6], причем с помощью формулы (1) для нормализованной последовательности $\{R_n(t)\}_0^\infty$ при условии $R_n'(0) \neq 0,\ n \geq 1,$ в ряде случаев удается установить следующее полезное свойство: все n корней многочлена $R_n(t),\ n \geq 1,$ различны, действительны и неположительны.

Различные производящие функции последовательности $\{R_n(t)\}_0^\infty$ являются мощным инструментом комбинаторного анализа. Для экспоненциальной производящей функции, определяемой формальным степенным рядом $R(t,z) = \sum_{n=0}^\infty R_n(t)(n!)^{-1} z^n$, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. При выборе в формуле (1) $h_s(t) = t^{s+1}$, где s – неотрицательный целый параметр, производящая функция $R(t,z)$ описывается выражением

$$R_0(t,z) = w^{-1}(t)\, w(t e^{k^{-1}(t) z}),$$

$$R_s(t,z) = w^{-1}(t)\, w\left(t\left(1 - s k^{-1}(t) t^s z\right)^{-1/s} \right),\ s \geq 1, \tag{3}$$

где в случае $s = 0$ $R_s(t,z)$ понимается как предел при $s \to 0$.

Доказательство. Полагая $w(t) = \sum_{m=0}^\infty w_m t^m$, запишем $R_s(t,z)$ в виде

$$R_s(t,z) = w^{-1}(t) \sum_{n=0}^\infty \frac{(k^{-1}(t)z)^n}{n!} H^n w(t) = w^{-1}(t) \sum_{n=0}^\infty \frac{(k^{-1}(t)z)^n}{n!} \sum_{m=0}^\infty w_m t^{s+1} D^n t^m .$$

Меняя порядок суммирования, а также используя биномиальную формулу $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n$ и равенство

$$t^{s+1} D^n t^m = m(m+s)\ldots(m+(n-1)s)\, t^{m+ns},$$

имеем

$$R_s(t,z) = w^{-1}(t) \sum_{m=0}^\infty w_m t^m \sum_{n=0}^\infty (-1)^n s^n \binom{-ms^{-1}}{n} u^n =$$

$$= w^{-1}(t) \sum_{m=0}^\infty w_m (t(1-su)^{-1/s})^m ,$$

где для простоты записи применено обозначение $u = k^{-1}(t) t^s z$. С учетом вида весовой функции и предела $\lim\limits_{s \to 0} (1-su)^{-1/s} = e^u$ окончательно находим (3).

Для функции $\tilde{R}(t,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}R_n(t)\,\zeta^{-n-1}$, являющейся формальным преобразованием Лапласа $R(t,z)$ по переменной z, справедливо утверждение.

Лемма 3. Если в формуле (1) положить $k(t)=1$, то производящая функция $\tilde{R}(t,\zeta)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$(\zeta-H)w(t)\tilde{R}(t,\zeta)=w(t)\,. \tag{4}$$

Доказательство. Используя (1) для преобразования $\tilde{R}(t,\zeta)$, получим

$$(\zeta-H)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w(t)R_n(t)}{\zeta^{n+1}}=(\zeta-H)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H^n}{\zeta^{n+1}}w(t)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H^n}{\zeta^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H^{n+1}}{\zeta^{n+1}}\right)w(t)=w(t)\,.$$

Условия теоремы Стилтьеса – Роджерса о J-дробях иногда позволяют перейти от ряда $R(t,z)$ к представлению $z^{-1}\tilde{R}(t,z^{-1})=\sum_{n=0}^{\infty}R_n(t)\,z^n$ в виде J-дроби:

$$J_z[\kappa_k(t),\lambda_k(t):(0,\infty)]=\frac{1}{1-\kappa_0(t)z}\,\frac{\lambda_0(t)z^2}{-1-\kappa_1(t)z}\,\frac{\lambda_1(t)z^2}{-1-\kappa_2(t)z}\,-\ldots,$$

причем $R_n(1)$ являются многочленами Якоби – Роджерса от переменных $\kappa_k(1)$, $\lambda_k(1)$ и связаны с перечислением взвешенных путей с n шагами, начало и конец которых находятся на высоте 0 [4].

В ряде случаев непосредственно с помощью леммы 3 удается записать $\tilde{R}(t,\zeta)$ в виде непрерывной J-дроби, что заменяет вычисления по алгоритму частных и разностей (QD-алгоритму) [6, 7], преобразующему $\{R_n(t)\}_0^{\infty}$ в последовательности $\{e_k^{(n)}(t)\}_{k=0}^{\infty}$, $\{q_k^{(n)}(t)\}_{k=1}^{\infty}$, $n=0,1,\ldots$, где $e_0^{(n)}(t)=0$, $q_1^{(n)}(t)=$ $=R_n^{-1}(t)R_{n+1}(t)$, а J-дробь при $\kappa_k(t)=q_{k+1}^{(0)}(t)+e_k^{(0)}(t)$, $\lambda_k(t)=e_{k+1}^{(0)}(t)\,q_{k+1}^{(0)}(t)$, $k=0,1,\ldots,$ имеет вид

$$\tilde{R}(t,\zeta)=\frac{1}{\zeta-\kappa_0(t)}\,\frac{\lambda_0(t)}{-\zeta-\kappa_1(t)}\,\frac{\lambda_1(t)}{-\zeta-\kappa_2(t)}\,-\ldots,$$

который можно рассматривать как четную форму S-дроби:

$$\tilde{R}(t,\zeta)=\frac{1}{\zeta}\,\frac{q_1^{(0)}(t)}{-\;1}\,\frac{e_1^{(0)}(t)}{-\;\zeta}\,\frac{q_2^{(0)}(t)}{-\;1}\,\frac{e_2^{(0)}(t)}{-\;\zeta}\,-\ldots$$

Отметим, что замена $t=\tau^{-1}$ в формуле (1) и ее умножение на τ^{n+1} меняет порядок коэффициентов нормализованного многочлена $R_n(t)$ на обратный. В частности, для многочленов Эйлера $A_n(t)=(1-t)^{n+1}(tD_t)^n(1-t)^{-1}$, $D_t=d/dt$ при $t=\tau^{-1}$ имеем $A_n(\tau^{-1})=\tau^{-(n+1)}(\tau-1)^{n+1}(-\tau D_\tau)^n(1-(1-\tau)^{-1})$,

$A_n(\tau) = \tau^{n+1} A_n(\tau^{-1})$, т.е. многочлен $t^{-1} A_n(t)$ является возвратным. Замена $t = \tau(1+\tau)^{-1}$ для многочленов Эйлера $A_n(t)$ приводит к сопряженным относительно этого преобразования многочленам

$$\overline{A}_n(\tau) = (1+\tau)^n A_n(\tau(1+\tau)^{-1}) = (1+\tau)^{-1} (\tau(1+\tau) D_\tau)^n (1+\tau),$$

для которых в формуле (1) $k(\tau) = 1$, а коэффициенты $\overline{A}_{n,k} = k! S_{n,k}$ – числа Моргана.

В лемме 2 использовалось введение параметра s в оператор H. Естественно рассматривать в формуле (1) весовую функцию $w_r(t)$, зависящую от неотрицательного целого параметра r.

2. Обобщенные многочлены Эйлера

В работах [8–10] исследовались обобщенные многочлены Эйлера $A_{n,r}(t), r \ge 1$, коэффициенты которых $A_{n,r,k}$ перечисляют обобщенные r-перестановки Гесселя – Стенли с k подъемами, причем $A_{n,r}(1) = 1 \cdot (r+1) \cdot \ldots \cdot (r(n-1)+1)$ – число всех таких перестановок, а $A_{n,1}(t) = A_n(t)$.

Определение 1. Обобщенные многочлены Эйлера $A^*_{n,r}(t), r \ge 0,$ зададим соотношением (1) при $k_r(t) = (1-rt)^{-1}, w_r(t) = (1-rt)^{-1/r}, h(t) = t$.

По определению 1 получим $A^*_{n,1}(t) = A_n(t)$, а $\lim\limits_{r \to 0} A^*_{n,r}(t) = S_n(t)$.

Теорема 1. Для последовательности $\{A^*_{n,r}(t)\}_{n=0}^{\infty}$, $r = 0,1,\ldots$, производящие функции $A^*_r(t,z)$ и соответственно $z^{-1} \tilde{A}^*_r(t, z^{-1})$ имеют следующий вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^*_{n,r}(t) z^n}{n!} = \left(\frac{1-rt}{1-rt\, e^{z(1-rt)}} \right)^{1/r}; \tag{5,а}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^*_{n,r}(t) z^n = J_z[\kappa_k(t), \lambda_k(t) : (0,\infty)], \tag{5,б}$$

где $\lim\limits_{r \to 0} A^*_r(t,z) = e^{t(e^z - 1)}$, а $\kappa_k(t) = (rk+1)t + k$ и $\lambda_k(t) = (k+1)(rk+1)t$.

Доказательство. Равенство (5,а) сразу следует из леммы 2 при $s = 0$. Если $t = (1+r\tau)^{-1}\tau$, то $\overline{A}^*_{n,r}(\tau) = (1+r\tau)^n A^*_{n,r}((1+r\tau)^{-1}\tau)$ – многочлен, для которого в (1) $k(\tau) = 1$, $w_r(\tau) = (1+r\tau)^{1/r}$ и $H_r = \tau(1+r\tau) D_\tau$. Полагая ζ параметром и используя формулу (4) для функции $u(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{A}^*_{n,r}(\tau) \zeta^{-n-1}$, находим дифференциальное уравнение $\tau(1+r\tau)u' - (\zeta - \tau)u = -1$, причем замена $\tau = -r^{-1}x$, $v(x) = u(-r^{-1}x)$ приводит к уравнению $x(1-x)v' - {}$ $-(\zeta + r^{-1}x)v = -1$, которое подстановкой $v(x) = v_0^{-1}(x)$ преобразуется в начальный член последовательности дифференциальных уравнений Риккати

$$v_m' + \left(\frac{a_m}{x} + \frac{b_m}{1-x}\right)v_m + \frac{c_m v_m^2}{x(1-x)} = d_m,\ m = 0,1,\ldots$$

с параметрами $a_0 = z,\ b_0 = z + r^{-1},\ c_0 = -1,\ d_0 = 0$, а каждый член этой последовательности уравнений Риккати переходит в последующий при замене $c_m v_m = (a_m - b_m)x - a_m + c_m x(1-x)v_{m+1}^{-1}$, $m = 0,1,\ldots,$ и $a_{m+1} = a_m - 1$, $b_{m+1} = b_m + 1$, $c_{m+1} = d_m + (b_m - a_m)c_m^{-1},\ d_1 = c_0$ [11]. Поэтому находим $a_m = a_0 - m,\ b_m = b_0 + m$, $c_{m-1}c_m = c_0 d_0 + m(m - 1 + b_0 - a_0)$, что с учетом выполненных подстановок и упрощения непрерывной дроби приводит к равенству (5,б).

Следствие 1. Переход к пределу при $r \to t^{-1}$ в соотношении (5,а) дает $\sum_{n=0}^{\infty}(t)_n (n!)^{-1} z^n = (1-z)^{-t}$, где $(t)_n = t(t+1)\ldots(t+n-1)$ – символ Похгаммера, а коэффициенты многочлена $A_{n,r}^*(t) = (t)_n$ в этом случае являются числами Стирлинга первого рода без знака.

Определим числа $\{A_{n,r,k}^*\}_{k=1}^n$, полагая $A_{n,r}^*(t) = \sum_{k=1}^n A_{n,r,k}^* r^{k-n} t^k$. Тогда с помощью подстановок $t = r^{-1}\tau$ и $z = r\zeta$ при $r \ge 1$ из равенства (5,а) при $\tau \to 1$ находим, что $\sum_{k=1}^n A_{n,r,k}^* = 1\cdot(r+1)\cdot\ldots\cdot(r(n-1)+1) = A_{n,r}(1),\ r \ge 1$.

Теорема 2. Для многочленов $A_{n,r}^*(t),\ r \ge 0$ и чисел $A_{n,r,k}^*$, $r \ge 1$, справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$A_{0,r}^*(t) = 1,\ A_{n,r}^*(t) = (r(n-1)+1)\,t\,A_{n-1,r}^*(t) + t(1-rt)\,D\,A_{n-1,r}^*(t),\ n \ge 1; \quad (6)$$

$$A_{0,r,k}^* = \delta_{0k},\ A_{n,r,k}^* = rk\,A_{n-1,r,k}^* + (r(n-k)+1)A_{n-1,r,k-1}^*,\ k \in \mathbf{Z},\ n \ge 1, \quad (7)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера; $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$, если $i \ne j$; а $\mathbf{Z}$ – множество целых чисел.

Доказательство. Формула (6) находится по лемме 1. Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях τ в формуле (6), домноженной на r^n, и в формуле, полученной из (6) заменой $t = r^{-1}\tau$, $r \ge 1$, приводит к соотношению (7).

Числа Стирлинга второго рода $S_{n,k}$ и числа Эйлера $A_{n,k}$ часто определяют с помощью формул $t^n = \sum_{k=1}^n S_{n,k} k! \binom{t}{k}$ и $t^n = \sum_{k=1}^n A_{n,k}\binom{t+k-1}{n}$ соответственно, причем вторая из них называется тождеством Ворпицкого [2, 3, 5]. Теорема 2 позволяет получить следующее утверждение.

Теорема 3. При $t \ge 0$ справедливо обобщенное тождество Ворпицкого

$$t^n r^t \binom{t + r^{-1} - 1}{t} = \sum_{k=1}^{n} A^*_{n,r,k} r^{t-n} \binom{t - k + n + r^{-1} - 1}{n + r^{-1} - 1}, \ r \ge 1, \qquad (8)$$

где биномиальные коэффициенты в общем случае выражаются через гамма-функцию, а при $r \to 0$ (8) переходит в формулу, определяющую числа $S_{n,k}$.

Доказательство. Обозначая множитель при коэффициенте $A^*_{n,r,k}$ в правой части выражения (8) через $X_{n,r,k}(t)$ и используя рекуррентную формулу (7), находим для функций $X_{n,r,k}(t)$ рекуррентное соотношение

$$t X_{n-1,r,k}(t) = rk X_{n,r,k}(t) + (r(n-k-1)+1) X_{n,r,k+1}(t), \ r \ge 1,$$

проверяемое непосредственно, как и предельный случай при $r \to 0$.

Тождество (8) доказано в [12] другим способом, причем в [12] также описано его обращение в смысле Мебиуса. Это тождество определяет коэффициенты связи между двумя полиномиальными базисами [2, 3].

Теорема 3 влечет следующее утверждение.

Следствие 2. Пусть z-преобразование функции $f(t)$, $t \ge 0$ определено равенством $Z\{f(t), z\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^n$. Тогда справедливо соотношение

$$Z\left\{ t^n r^t \binom{t + r^{-1} - 1}{t}, z \right\} = (1 - rz)^{-n-r^{-1}} A^*_{n,r}(z), \ r \ge 0,$$

причем $r = 0$ рассматривается как предельный случай.

Следствие 2 указывает причину появления многочленов $A^*_{n,r}(t)$ в приложениях, а теорема 1 показывает, что $A^*_{n,r}(t)$ проще в применении, чем многочлены $A_{n,r}(t)$, для которых соотношения вида (5) в общем случае не найдены.

3. Комбинаторные интерпретации обобщенных чисел Эйлера

Для комбинаторной интерпретации чисел $A_{n,r,k}$ и $A^*_{n,r,k}$, $r \ge 1$, рассмотрим биекцию между множеством $GS_{n,r}$ обобщенных r-перестановок Гесселя – Стенли мультимножества $\{1^r, \ldots, n^r\}$ [8–10] и множеством $BS_{n,r}$ корневых помеченных r-угольных кактусов $BS_{n,r}$ [12].

Определение 2. r-перестановка $\sigma \in GS_{n,r}$ – это слово $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_{rn}$, у которого все буквы, стоящие между любыми двумя вхождениями символа $i \in \{1, \ldots, n\}$, не меньше этого i.

Рекурсивный алгоритм генерации множества $GS_{n+1,r}$ основан на построении $(rn+1)$-й перестановки из $GS_{n+1,r}$ путем вставки слова $(n+1)^r$

в начало, конец и между любыми двумя буквами выбранного слова $\pi \in GS_{n,r}$, что дает $|GS_{n+1,r}| = 1 \cdot (r+1) \cdot \ldots \cdot (rn+1)$. В работе [10] предложен второй рекурсивный алгоритм.

Связный граф, который не содержит ребер, лежащих более чем на одном простом цикле, называется кактусом [13].

Определение 3. Корневой помеченный r-угольный кактус $\gamma \in BS_{n,r}$, $r \geq 1$, – это связный граф, растущий (вверх) из корня (вершины с меткой 0) и составленный из n помеченных различными числами $1, \ldots, n$ r-угольников, каждая пара которых имеет не более одной общей вершины (1-угольник изображается ребром с одной помеченной вершиной, а 2-угольник – помеченным ребром).

Рекурсивный алгоритм генерации множества $BS_{n+1,r}$ базируется на построении $(rn+1)$-го кактуса из $BS_{n+1,r}$ с помощью соединения нижней вершины r-угольника с меткой $n+1$ (остальные его вершины считаются верхними) с каждой из $(rn+1)$-й вершин (включая корень) выбранного кактуса $\gamma \in BS_{n,r}$, что позволяет найти $|BS_{n+1,r}| = 1 \cdot (r+1) \cdot \ldots \cdot (rn+1)$.

Считая, что в описанных алгоритмах вставка слова $(n+1)^r$ и соединение r-угольника с меткой $n+1$ проводятся последовательно слева направо и, соответственно, по часовой стрелке, начиная от корня, находим биекцию $\varphi : GS_{n,r} \to BS_{n,r}$ ($BS_{n,1}$ является множеством неупорядоченных корневых деревьев с $(n+1)$-й помеченной вершиной, а $BS_{n,2}$ – с n помеченными ребрами).

Пусть $\sigma \in GS_{n,0}$ – упорядоченное разбиение множества $\{1, \ldots, n\}$, т.е. $\sigma = \sigma^{(1)} \ldots \sigma^{(m)}$, $\sigma^{(k)} = \{\sigma_1^{(k)} \ldots \sigma_{p_k}^{(k)}\}$ – блок σ, а $\sigma_1^{(k)} < \ldots < \sigma_{p_k}^{(k)}$ и $\sigma_1^{(1)} < \ldots < \sigma_1^{(m)}$, $1 \leq k \leq m$. Каждому $\sigma \in GS_{n,0}$ сопоставим слоистую диаграмму $\gamma \in BS_{n,0}$, состоящую из m горизонтальных отрезков плоскости, причем k-й отрезок соединяет точку $(\sigma_1^{(k)}, 1)$ с $(\sigma_{p_k}^{(k)}, 1)$ и проходит через вершины $(\sigma_1^{(k)}, 1), \ldots, (\sigma_{p_k}^{(k)}, 1)$ [4]. Имеем равенства $|GS_{n,0}| = |BS_{n,0}| = S_n(1)$.

Пусть $\operatorname{rise}(\sigma)$ – число подъемов r-перестановки $\sigma \in GS_{n,r}, \sigma_0 = 0$, $r \geq 1$. Тогда биекция $\varphi : \sigma \mapsto \gamma$ для $\gamma \in BS_{n,r}$ определяет $\operatorname{rise}(\gamma) = \operatorname{rise}(\sigma)$. В работах [8–10] показано, что коэффициенты $A_{n,r,k} = \#\{\sigma : \sigma \in GS_{n,r}, \operatorname{rise}(\sigma) = k\}$ обобщенного многочлена Эйлера $A_{n,r}(t) = \sum_{k=1}^{n} A_{n,r,k}\, t^k$ удовлетворяют рекуррентной формуле

$$A_{0,r,k} = \delta_{0k},$$

$$A_{n,r,k} = kA_{n-1,r,k} + (r(n-1) - k + 2)A_{n-1,r,k-1},\ k \in \mathbf{Z},\ n \geq 1, \tag{9}$$

а для многочлена $A_{n,r}(t)$ в (1) $k_r(t)=(1-t)^{-r}$, $w(t)=(1-t)^{-1}$, $h_r(t)=(1-t)^{1-r}t$ и

$$A_{0,r}(t)=1,\ A_{n,r}(t)=(r(n-1)+1)tA_{n-1,r}(t)+t(1-t)DA_{n-1,r}(t),\ n\geq 1.$$

Определение 4. Свободные левые верхние вершины всех r-угольников кактуса $\gamma\in BS_{n,r}$ назовем листьями и обозначим $l(\gamma)$ – число листьев $\gamma\in BS_{n,r}$.

В работе [12] получено следующее утверждение.

Теорема 4. $A_{n,r,k}=\#\{\gamma:\gamma\in BS_{n,r},\ l(\gamma)=k\}$.

Доказательство. При $r=1$ дополнение $\operatorname{crise}(\sigma)=n+1-\operatorname{rise}(\sigma)$ дает число спусков $\operatorname{des}(\sigma)$ при $\sigma_{n+1}=0$ перестановки $\sigma\in GS_{n,1}$. Биекция $\varphi:\sigma\mapsto\gamma$ показывает, что $l(\gamma)=n+1-\operatorname{rise}(\gamma)$ [3], и теорема 4 верна. Эта биекция и определение 4 показывают, что кактусу $\gamma\in BS_{n,r}$, $r\geq 2$, соответствует r-перестановка $\sigma\in GS_{n,r}$, а

$$l(\gamma)=l(\sigma)=\#\{\sigma_i:\sigma_i=\sigma_{i+1},\sigma_i\neq\sigma_j,\ j<i,\ 1\leq i\leq n-1\}.$$

Поэтому формула (9) для r-перестановок несложно проверяется методом математической индукции. Заодно показано, что не рассматриваемая в [8–10] статистика $l(\sigma)$, $\sigma\in GS_{n,r}$, $r\geq 2$, также является обобщенной эйлеровой статистикой.

Удаление меток в каждом $\gamma\in BS_{n,r}$ и, соответственно, расстановка скобок в слове $\sigma\in GS_{n,r}$ (перед первым и после последнего вхождения любого символа), а также отождествление букв приводит к разбиению $BS_{n,r}$ и $GS_{n,r}$ на классы эквивалентности – фактор множества $\overline{BS}_{n,r}$ и $\overline{GS}_{n,r}$. В работе [12] отмечено, что их мощности выражаются через числа Фусса – Каталана [5] $C_n^{(r)}=\dfrac{1}{(r-1)n+1}\dbinom{rn}{n}$.

Теорема 5. При $r\geq 2$ справедливы равенства $|\overline{BS}_{n,r}|=|\overline{GS}_{n,r}|=C_n^{(r)}$.

Доказательство. Слово $u\in\overline{GS}_{n,r}$ состоит из $(r+2)n$ символов «(», «)», «x» и достаточно найти только $|\overline{GS}_{n,r}|$ в силу биекции $\varphi:\sigma\mapsto\gamma$. Последовательное вычеркивание в слове $u\in\overline{GS}_{n,r}$ ровно r символов «x», заключенных в скобки, определяет соответствие с надлежащей расстановкой скобок в слове длины $m=(r-1)n+1$, отвечающей n r-арным операциям. Так как мощность множества указанных расстановок скобок равна $C_n^{(r)}$ [14], то теорема доказана.

Приведем один из возможных алгоритмов приписывания весов $w=w(\sigma)$ r-перестановкам $\sigma\in GS_{n,r}$, $r\geq 1$, так, чтобы $A^*_{n,r,k}=\#\{\sigma:\sigma\in GS_{n,r}$,

$w(\sigma)=k\}$: а) перестановке $\sigma\in GS_{1,r}$ присваивается вес, равный единице; б) если $\sigma\in GS_{n,r}$ имеет вес w, то всем r-перестановкам из $GS_{n+1,r}$, получаемым из нее вставкой слева направо слова $(n+1)^r$, приписываются последовательные веса из слова $w^r\,\overline{w}^{r(n-1)+1}$, где $\overline{w}=w+1$. В этом случае биекция $\varphi: GS_{n,r}\to BS_{n,r}$ определяет соответствующие веса корневых помеченных r-угольных кактусов $\gamma\in BS_{n,r}$.

Отметим, что в [15] впервые была доказана биекция $\varphi: GS_{n,2}\to BS_{n,2}$, а в [16] при $r=2$ рассмотрен аналог формулы (5,а) и исследованы на $\overline{BS}_{n,2}$ 12 весов $w_i(n)$, причем $w_{11}(n)=|BS_{n,2}|$, $w_{12}(n)=A^*_{n,2}(1)$.

4. Конечно-разностные и q-аналоги обобщенной формулы Родрига

Определим многочлены $B_{n,r}(t)$ с неотрицательным целочисленным параметром r с помощью следующего конечно-разностного аналога формулы (1):

$$B_{n,r}(t)=(r+1)^{-t}(t(E-rI))^n(r+1)^t,$$

где $Ef(t)=f(t+1)$ задает оператор сдвига; I – тождественный оператор.

Действуя аналогично лемме 1, находим рекуррентную формулу

$$B_{0,r}(t)=1,$$

$$B_{n,r}(t)=(r+1)tB_{n-1,r}(t+1)-rtB_{n-1,r}(t),$$

причем $B_{n,0}(t)=(t)_n$, а $B_{n,1}(t)$ определяется с помощью оператора $\Delta=E-I$.

В этом случае легко вычисляются только экспоненциальные производящие функции $B_0(t,z)=(1-z)^{-t}$ и $B_1(t,z)=(2-e^z)^{-t}$.

Теорема 6. Производящая функция

$$\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}B_{n,r}(t)z^n=J_z\left[\kappa_k(t),\lambda_k(t):(0,\infty)\right],$$

где $\kappa_k(t)=t+(r+2)k$ и $\lambda_k(t)=(r+1)(k+1)(t+k)$, $r\ge 0$.

Доказательство. Применяя формулу (4) при $H_r=t(E-rI)$ и $w_r(t)=(r+1)^t$ к функции $u(t)=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}B_{n,r}(t)\zeta^{-n-1}$ с параметром ζ, находим разностное уравнение $(r+1)tu(t+1)-(rt+\zeta)u(t)=-1$, преобразуемое подстановкой $u(t)=v_0^{-1}(t)$ в начальный член последовательности разностных уравнений

$$(rt+\zeta-m)v_m(t+1)-(r+1)(t+m)v_m(t)-$$
$$-v_m(t)v_m(t+1)=m(r+1)(t+m),\ m=0,1,\dots,$$

а каждый член этой последовательности уравнений переходит в последующий при замене $v_m(t) = \zeta - t - (r+2)m - (r+1)(m+1)(t+m)v_{m+1}^{-1}(t),\ m = 0,1,\ldots$, что с учетом выполненных подстановок приводит к результату.

Для записи q-аналогов многочленов $S_n(t),\ A_n(t),\ \overline{A}_n(t)$, $|q|<1$, с помощью обобщенной формулы Родрига используем обозначения

$$[n]_q = (1-q)^{-1}(1-q^n),$$

$$(t;q)_n = (1-t)(1-tq)\ldots(1-tq^{n-1}),\ [n]_q! = (1-q)^{-n}(q;q)_n.$$

Тогда, полагая в формуле (1) $H = t\Delta_q$, где $t\Delta_q f(t) = (1-q)^{-1}\times \times(f(t)-f(tq))$, а Δ_q – q-аналог конечно-разностного оператора Δ, определим следующие многочлены:

$$S_n(t;q) = e_q^{-1}((1-q)t)(t\Delta_q)^n e_q((1-q)t); \tag{10}$$

$$\overline{S}_n(t;q) = (-(1-q)t;q)_n \overline{e}_q^{-1}((1-q)t)(t\Delta_q)^n \overline{e}_q((1-q)t), \tag{11}$$

где

$$e_q(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(q;q)_n^{-1}t^n = (t;q)_\infty^{-1},\ \overline{e}_q(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(q;q)_n^{-1}q^{n(n-1)/2}t^n = (-t;q)_\infty,$$

а функции $e_q((1-q)t)$ и $\overline{e}_q((1-q)t)$ являются q-аналогами экспоненты;

$$A_n(t;q) = (t;q)_{n+1}(t\Delta_q)^n(1-t)^{-1}; \tag{12}$$

$$\overline{A}_n(t;q) = (1+t)^{-1}((1+t)t\Delta_q)^n(1+t). \tag{13}$$

Верны равенства: $\lim\limits_{q\to 1}(1-q)^{-n}(q^t;q) = (t)_n$, $\lim\limits_{q\to 1}[n]_q = n$, $\lim\limits_{q\to 1}[n]_q! = n!$, $\lim\limits_{q\to 1} t\Delta_q = tD$, а использование q-аналога леммы 1 позволяет записать для многочленов (10)–(13) следующие рекуррентные соотношения:

$$S_0(t;q) = 1,\ S_n(t;q) = tS_{n-1}(tq;q) + t\Delta_q S_{n-1}(t;q),\ n \ge 1; \tag{14}$$

$$\overline{S}_0(t;q) = 1,\ \overline{S}_n(t;q) = tq^{n-1}\overline{S}_{n-1}(t;q) + t\Delta_q \overline{S}_{n-1}(t;q),\ n \ge 1; \tag{15}$$

$$A_0(t;q) = 1,\ A_n(t;q) = [n]_q tA_{n-1}(t;q) + (1-t)t\Delta_q A_{n-1}(t;q),\ n \ge 1; \tag{16}$$

$$\overline{A}_0(t;q) = 1,\ \overline{A}_n(t;q) = t\overline{A}_{n-1}(tq;q) + (1+t)t\Delta_q \overline{A}_{n-1}(t;q),\ n \ge 1. \tag{17}$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях t в (14) и (16) соответственно при использовании записей

$$S_n(t;q) = \sum_{k=1}^{n} S_{n,k}(q)q^{k(k-1)/2}t^k \text{ и } A_n(t;q) = \sum_{k=1}^{n} A_{n,k}(q)q^{k(k-1)/2}t^k$$

позволяет получить простые рекуррентные соотношения для коэффициентов $S_{n,k}(q)$ и $A_{n,k}(q)$:

$$S_{0,k}(q)=\delta_{0k},\ S_{n,k}(q)=[k]_q S_{n-1,k}(q)+S_{n-1,k-1}(q),\ k\in\mathbf{Z},\ n\geq 1; \qquad (18)$$

$$A_{0,k}(q)=\delta_{0k};$$

$$A_{n,k}(q)=[k]_q A_{n-1,k}(q)+[n-k+1]_q A_{n-1,k-1}(q),\ k\in\mathbf{Z},\ n\geq 1. \qquad (19)$$

Выполняя аналогичные операции с выражениями (15) и (17) при использовании записей

$$\overline{S}_n(t;q)=\sum\nolimits_{k=1}^{n}\overline{S}_{n,k}(q)q^{k(k-1)/2}t^k \text{ и } \overline{A}_n(t;q)=\sum\nolimits_{k=1}^{n}\overline{A}_{n,k}(q)[k]_q!t^k,$$

а также рекуррентных формул (18)–(19), несложно получить следующие соотношения: $\overline{S}_{n,k}(q)=q^{(n-k)(k-1)}S_{n,k}(q^{-1})$, $\overline{A}_{n,k}(q)=S_{n,k}(q)$.

Отметим, что q-аналог чисел Стирлинга второго рода $S_{n,k}(q)$ изучали Карлитц и Гульд, а q-аналог экспоненциальных многочленов $S_n(t;q)$ рассмотрен Милном [17]. q-аналог чисел Эйлера $A_{n,k}(q)$ введен в [18] с помощью q-аналога тождества Ворпицкого, а формула (19) и многочлены $t^{n+1}A_n(t^{-1};q)$ исследованы в [18, 19].

Теорема 7. а) Для многочленов $S_n(t;q)$ производящая функция имеет вид

$$\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}S_n(t;q)z^n=J_z[\kappa_k(t;q),\lambda_k(t;q):(0,\infty)];$$

$$\kappa_k(t;q)=tq^{2k}+[k]_q a_{k-1}(t;q) \text{ и } \lambda_k(t;q)=q^{2k}[k+1]_q t\, a_k(t;q),$$

где $a_k(t;q)=1-tq^k(1-q)$.

б) Для многочленов $\overline{A}_n(t;q)$ производящая функция имеет вид

$$\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\overline{A}_n(t;q)z^n=J_z[\kappa_k(t;q),\lambda_k(t;q):(0,\infty)];$$

$$\kappa_k(t;q)=tq^k[k+1]_q+[k]_q b_k(t;q) \text{ и } \lambda_k(t;q)=q^k[k+1]_q^2 t\, b_{k+1}(t;q),$$

где $b_k(t;q)=1+tq^k$.

Доказательство. а) Полагая $H_q=t\Delta_q$, $w(t;q)=e_q((1-q)t)$ и применяя формулу (4) к функции $u(t;q)=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}S_n(t;q)\zeta^{-n-1}$ с параметром ζ, получаем, используя несложное соотношение $t\Delta_q e_q((1-q)t)=te_q((1-q)t)$, уравнение $(\zeta(1-q)-1)u(t;q)-(t(1-q)-1))u(tq;q)=1-q$, которое с помощью подстановки $u(t;q)=v_0^{-1}(t;q)$ преобразуется в начальный член последовательности

$$(\zeta(1-q)-1+tq^{m-1}(1-q)^2[m]_q)v_m(tq;q)+q^m a_m(t;q)\,v_m(t;q)-$$

$$-(1-q)v_m(t;q)v_m(tq;q)=tq^{2m-1}(1-q)[m]_q\,a_m(t;q),\ m=0,1,\ldots,$$

а каждый член этой последовательности переходит в последующий при замене:

$$v_m(t;q)=\zeta-tq^{2m}-[m]_q a_{m-1}(t;q)-tq^{2m}[m+1]_q\,a_m(t;q)v_{m+1}^{-1}(t;q),\ m=0,1,\ldots,$$

что с учетом выполненных подстановок приводит к результату. В пределе при $q\to 1$ равенство теоремы 7,а совпадает с выражением (5,б) при $r=0$.

б) Аналогично, полагая $H_q=(1+t)t\Delta_q$, $w(t)=1+t$ и применяя соотношение (4) к функции $u(t;q)=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{A}_n(t;q)\zeta^{-n-1}$ с параметром ζ, получаем уравнение $(\zeta(1-q)-1-t)u(t;q)+(1+tq)u(tq;q)=1-q$, которое с помощью замены $u(t)=v_0^{-1}(t)$ преобразуется в начальный член последовательности уравнений

$$(\zeta(1-q)-1-t+t(1-q)^2[m]_q^2)v_m(tq;q)+q^m b_{m+1}(t;q)\,v_m(t;q)-$$

$$-(1-q)v_m(t;q)v_m(tq;q)=tq^m[m]_q^2\,b_{m+1}(t;q),\ m=0,1,\ldots,$$

а каждый член этой последовательности переходит в последующий при замене

$$v_m(t)=\zeta-tq^m[m+1]_q-[m]_q b_m(t;q)-q^m[m+1]_q^2\,tb_{m+1}(t;q)v_{m+1}^{-1}(t),\ m=0,1,\ldots,$$

что с учетом выполненных подстановок приводит к результату. При $q\to 1$ равенство теоремы 7,б совпадает с выражением для производящей функции сопряженных многочленов $\overline{A}_{n,1}^{*}(t)$, использованных при доказательстве теоремы 1.

Отметим, что представления производящей функции многочленов $S_n(t;q)$ в виде непрерывных дробей исследовались другим способом в [20], где также рассмотрена комбинаторная интерпретация $S_{n,k}(q)$. Карлитц в [18] показал, что $t^{n+1}A_n(t^{-1};q)$ – производящий многочлен пары статистик (rise, maj) на $GS_{n,1}$, а мажорирующий индекс $\mathrm{maj}(\sigma)=\sum_{\sigma_i>\sigma_{i+1}} i$ для $\sigma\in GS_{n,1}$ вычисляется при $i=1,\ldots,n-1$ [3, 19]. Поэтому $A_n(t;q)$ – производящий многочлен пары (des, maj) на $GS_{n,1}$. Для многочленов (10)–(13) при значениях $t=1$ и, соответственно, $q=1$ получаются надлежащие маргинальные распределения.

Заключение

Применение обобщенной формулы Родрига можно значительно расширить, используя в выражении (1) другие операторы H и весовые функции

$w(t)$. Так, в [10] исследовались многочлены, получаемые по формуле (1) при выборе $k(t) = t^r$, $H_r = t^{r+1}D$, $w(t) = e^t$ и целом неотрицательном параметре r.

Авторы выражают искреннюю благодарность Л. М. Коганову за ценную информационную поддержку и внимание к работе.

Список литературы

1. **Бейтмен, Г.** Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1974. – Т. 2. – 296 с.
2. **Айгнер, М.** Комбинаторная теория / М. Айгнер. – М. : Мир, 1982. – 558 с.
3. **Стенли, Р.** Перечислительная комбинаторика / Р. Стенли. – М. : Мир, 1990. – Т. 1. – 440 с.
4. **Гульден, Я.** Перечислительная комбинаторика / Я. Гульден, Д. Джексон. – М. : Наука, 1990. – 504 с.
5. **Грэхем, Р.** Конкретная математика. Основание информатики / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. – М. : Мир, 1998. – 704 с.
6. **Бондаренко, Л. Н.** Статистики на классах отображений / Л. Н. Бондаренко, М. Л. Шарапова // Дискретные модели в теории управляющих систем : VIII Международная конференция (Москва, 6–9 апреля 2009 г.). – М. : Изд. отдел факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова «МАКС Пресс», 2009. – С. 33–39.
7. **Рутисхаузер, Г.** Алгоритм частных и разностей / Г. Рутисхаузер. – М. : Изд-во иностр. лит., 1960. – 94 с.
8. **Бондаренко, Л. Н.** Два типа *r*-перестановок и *r*-многочлены Эйлера / Л. Н. Бондаренко, М. Л. Шарапова // Дискретная математика и ее приложения : материалы X Международного семинара (Москва, МГУ, 1–6 февраля 2010 г.). – М. : Изд-во Механико-математического факультета МГУ, 2010. – С. 217–220.
9. **Бондаренко, Л. Н.** Обобщенные распределения Эйлера и Мак-Магона на двух классах перестановок / Л. Н. Бондаренко, М. Л. Шарапова // Комбинаторные и вероятностные проблемы дискретной математики : сборник научных трудов. – Иркутск : Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2010. – (Дискретный анализ и информатика; вып. 4). – С. 14–23.
10. **Бондаренко, Л. Н.** Параметрические комбинаторные задачи и методы их исследования / Л. Н. Бондаренко, М. Л. Шарапова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 4. – С. 50–63.
11. **Хованский, А. Н.** Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа / А. Н. Хованский. – М. : ГИТТЛ, 1956. – 204 с.
12. **Бондаренко, Л. Н.** Интерполяционные взаимно обратные соотношения и обобщение формулы Ворпицкого / Л. Н. Бондаренко, М. Л. Шарапова // Проблемы теоретической кибернетики : материалы XVI Международной конференции (Нижний Новгород, 20–25 июня 2011 г.). – Нижний Новгород : Изд-во Нижегородского гос. ун-та, 2011 – С. 62–66.
13. **Харари, Ф.** Перечисление графов / Ф. Харари, Э. Палмер. – М. : Мир, 1977. – 324 с.
14. **Стенли, Р.** Перечислительная комбинаторика / Р. Стенли. – М. : Мир, 2009. – Т. 2. – 767 с.
15. **Коганов, Л. М.** Универсальная биекция между перестановками Гесселя – Стенли и диаграммами связей соответствующих рангов / Л. М. Коганов // Успехи математических наук. – 1996. – Т. 51, № 2. – С. 165–166.
16. **Klazar, M.** Twelve countings with rooted plane trees / M. Klazar // European Journal of Combinatorics. – 1997. – V. 18, № 2. – P. 195–210.

17. **Milne, St. C.** A q-analog of restricted growth functions, Dobinski's equality, and Charlier polynomials / St. C. Milne // Transactions of the American Mathematical Society. – 1978. – V. 245. – P. 89–118.
18. **Carlitz, L.** A combinatorial property of q-Eulerian numbers / L. Carlitz // The American Mathematical Monthly. – 1975. – V. 82, № 1. – P. 51–54.
19. **Фоата, Д.** Распределения типа Эйлера и Макмагона на группе перестановок / Д. Фоата // Проблемы комбинаторного анализа : сборник статей. – М : Мир, 1980. – С. 120–141.
20. **Zeng, J.** The q-Stirling numbers, continued fractions and the q-Charlier and q-Laguerre polynomials / J. Zeng / Journal of Computational and Applied Mathematics. – 1995. – V. 57. – P. 413–424.

Бондаренко Леонид Николаевич
кандидат технических наук, доцент, кафедра дискретной математики, Пензенский государственный университет

E-mail: leobond5@mail.ru

Bondarenko Leonid Nikolaevich
Candidate of engineering sciences, associate professor, sub-department of discrete mathematics, Penza State University

Шарапова Марина Леонидовна
старший преподаватель, кафедра математического анализа, механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: msharapova@list.ru

Sharapova Marina Leonidovna
Senior lecturer, sub-department of mathematical analysis, faculty of mechanics and mathematics, Moscow State University named after M. V. Lomonosov

---

УДК 519.1

Бондаренко, Л. Н.

Применение обобщенной формулы Родрига в комбинаторном анализе / Л. Н. Бондаренко, М. Л. Шарапова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 4 (20). – С. 44–58.